

**Einbettung von Strömungen
in Funktionenräume durch Erzeuger
vom endlichen Typ**

von

Ernst Eberlein

aus

Rothenburg ob der Tauber



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548610_0054

Einbettung von Strömungen in Funktionenräume durch Erzeuger vom endlichen Typ

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt

von

Ernst Eberlein

aus

Rothenburg ob der Tauber

Als Dissertation genehmigt
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg

Einleitung von Strömungen
in Funktionsräumen durch Erzeuger
vom englischen Typ

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erteilung des Dokortitels



Tag der mündlichen Prüfung: 29. November 1972

Dekan: Professor Dr. W. Heumann

Erstberichterstatter: Professor Dr. K. Jacobs

Zweitberichterstatter: Professor Dr. H. Bauer

aus

Bibliothek der Fakultät

Inhalt

	Seite
Einleitung	1
§ 1 Strömungen auf Lebesgueschen Maßräumen	5
§ 2 Erzeuger vom endlichen Typ	16
§ 3 Einbettung von Strömungen in Funktionen- räume	30
Literatur	34

Einleitung

Ein bekannter Satz aus der Ergodentheorie besagt, daß jede aperiodische, maßtreue und eineindeutige Abbildung T auf einem Lebesgueschen Maßraum einen abzählbaren Erzeuger besitzt (Rokhlin [1])⁺. Daraus ergibt sich, daß man jede solche Abbildung in einen shift-Raum über einem abzählbaren Alphabet einbetten kann. Ein Punkt geht dabei in dasjenige Element des shift-Raumes über, das in der k -ten Koordinate angibt, in welchem Erzeugerelement der Punkt sich zum Zeitpunkt k aufhält.

Betrachtet man an Stelle einer Abbildung T eine einparametrische Schar $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ maßtreuer eineindeutiger Abbildungen - oder wie wir sagen wollen, eine Strömung - so entsprechen den diskreten Punktfolgen $(T_t^k w)_{k \in \mathbb{Z}}$, die die Punkte unter T durchlaufen, kontinuierliche Bahnen $(T_t w)_{t \in \mathbb{R}}$. Zur Einbettung solcher Bahnen bieten sich Räume von Funktionen auf der Parametermenge $\mathbb{R}$ an.

K. Jacobs [2] schlägt die stetigen, reellwertigen Funktionen vor, die einer Lipschitzbedingung genügen. Eine Reihe von Gründen spricht für die Wahl dieser L^A -Räume (Definition von L^A in § 3). Sie sind - versehen mit einer geeigneten Metrik - kompakte topologische Räume und

⁺) Die Ziffern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.

die shift-Strömung definiert eine stetige Strömung (vgl. Definition (3.1)). Darüberhinaus ist die Geschwindigkeit dieser Strömung beschränkt; und zwar gerade durch die Lipschitzkonstante. Wir sagen dabei, eine stetige Strömung $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ auf einem kompakten Raum Ω mit Metrik d hat die Geschwindigkeit $G > 0$, wenn

$$d(T_t w, T_{t'} w) \leq G |t - t'|$$

für alle $t, t' \in \mathbb{R}$ und alle $w \in \Omega$ gilt und G minimal mit dieser Eigenschaft ist. Man sieht unmittelbar, daß etwa im Raum aller stetigen Funktionen mit derselben Metrik keine beschränkte Geschwindigkeit mehr vorliegt. Per Definition ist die topologische Entropie einer Strömung $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ die topologische Entropie $h(T_1)$ der diskreten Abbildung T_1 (vgl. Arnold-Avez [1]). Sie ist bekanntlich eine obere Schranke für die Entropien maßtreuer Abbildungen auf demselben Raum. Da bei einer Einbettung die Entropie als Isomorphieinvariante unverändert bleibt, ist es von entscheidender Bedeutung, diese obere Schranke im Bildraum zu kennen. Für die shift-Strömung $(S_t)_{t \in \mathbb{R}}$ auf L^A gilt

$$h(S_1) = \infty.$$

Versieht man denselben Raum mit der Metrik, die als Abstand zweier Funktionen das Supremum der punktweisen Differenzen längs ganz $\mathbb{R}$ definiert, so ist die shift-Strömung in diesem Fall eine Isometrie und hat somit die topologische Entropie 0. Schließlich sei noch erwähnt, daß L^A unabhängig von A die Überdeckungsdimension 1 hat.

Versucht man nun Strömungen in L^A einzubetten, so stellt man fest, daß es einerseits genügt, wie im diskreten Fall Zerlegungen des Grundraumes zu betrachten, die unter einer Abbildung T_{t_0} aus $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ die σ -Algebra erzeugen, daß aber andererseits der Verlauf der Bahnen in Bezug auf diese Zerlegungen möglichst glatt zu sein hat. Genauer heißt das, daß alle Bahnen, die in ein bestimmtes Zerlegungselement eintreten, dort auch jeweils eine gewisse positive Mindestzeit verweilen müssen und daß außerdem jedes endliche Bahnstück nur eine endliche Anzahl von Zerlegungselementen anschneiden darf. Eine solche Zerlegung nennen wir einen Erzeuger vom endlichen Typ für die Strömung (vgl. Definition (2.6)).

Die im folgenden verwendeten allgemein maßtheoretischen Begriffe und Sätze finden sich bei K. Jacobs [3]. Zerlegungen von Lebesgueräumen werden bei Rokhlin [1] ausführlich behandelt. § 1 führt unter Ausnützung einiger klassischer Ergebnisse auf Satz (1.10) hin, der es erlaubt, aperiodische Strömungen bis auf Isomorphie in einer standardisierten Form anzunehmen. In § 2 beweisen wir die Existenz abzählbarer Erzeuger vom endlichen Typ. Es sei darauf hingewiesen, daß Lemma (2.4) und Satz (2.7) beweistechnisch eine Einheit bilden. Wir haben in (2.4) die Konstruktion sog. 'Rokhlinscher Mengen' vorweggenommen, um den langen Beweis übersichtlich zu halten. § 3 wendet den Erzeugersatz zur Einbettung aperiodischer Strömungen

in L^A -Räume an. Periodische Strömungen sind von untergeordnetem Interesse. Man kann sie in naheliegender Weise in L^A -Räume einbetten. Die Menge der Fixpunkte geht dabei in die konstanten Funktionen über und läßt sich somit nur einbetten, wenn sie isomorph zu einer Teilmenge des Einheitsintervalls ist.

Ein ähnliches Resultat, wie es in dieser Arbeit erzielt wird, ist im Bereich der topologischen Dynamik bekannt. Eine stetige Strömung läßt sich genau dann homöomorph in den Raum aller stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ einbetten, wenn die Menge der Fixpunkte leer oder homöomorph zu einer Teilmenge der reellen Zahlen ist. Dieser Satz wurde zuerst von M. Bebutov bewiesen. S. Kakutani [1] gab unter Verwendung eines Kategorie-Arguments einen vereinfachten Beweis an. Ein weiteres Ergebnis (Eberlein [1]) befaßt sich mit stetigen Strömungen beschränkter Geschwindigkeit, für die ein invariantes Maß auf der Borelschen σ -Algebra existiert. Es besagt, daß jede (topologisch) minimale Teilströmung einer solchen Strömung außerhalb einer invarianten Menge vom Maß 0 stetig in L^A eingebettet werden kann.

Herrn Prof. Dr. K. Jacobs möchte ich für die großzügige Förderung danken, die ich während meines Studiums und beim Entstehen dieser Arbeit durch ihn erfahren habe.

§ 1 Strömungen auf Lebesgueschen Maßräumen

(1.1) DEFINITION

Sei $(\Omega, \mathcal{L}, m)$ ein Maßraum und $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine einparametrische Schar eindeutiger, maßtreuer Abbildungen von Ω auf sich, die

$$T_t \circ T_s = T_{t+s} \quad (t, s \in \mathbb{R})$$

erfüllt, dann heißt das System $(\Omega, \mathcal{L}, m, (T_t)_{t \in \mathbb{R}})$ eine (zeitkontinuierliche) Strömung.

Wir werden uns nur mit Strömungen auf Lebesgueschen Maßräumen, d.h. vollständigen, atomfreien, normierten Räumen mit abzählbarer Basis befassen. Eine Strömung wird als meßbar bezeichnet, wenn die Abbildung

$$(w, t) \longrightarrow T_t w,$$

die $\Omega \times \mathbb{R}$ in Ω überführt, meßbar bezüglich der Produkt- σ -Algebra in $\Omega \times \mathbb{R}$ ist. Alle von uns betrachteten Strömungen seien als meßbar vorausgesetzt. Die explizit konstruierten Strömungen erweisen sich jeweils als meßbar.

Eine Menge $\Omega_0 \subset \Omega$ heißt invariant, wenn $T_t \Omega_0 = \Omega_0 \pmod{m}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

(1.2) DEFINITION

Eine Strömung $(\Omega, \mathcal{L}, m, (T_t)_{t \in \mathbb{R}})$ heißt

- (1) ergodisch, wenn für jede Zerlegung $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ in meßbare, invariante Mengen entweder $m(\Omega_1) = 0$ oder $m(\Omega_2) = 0$ ist,

(2) aperiodisch, wenn die Menge der periodischen Punkte das Maß 0 hat, also

$$m(\{w \in \Omega \mid T_t w = w \text{ für ein } t \neq 0\}) = 0.$$

Im folgenden schreiben wir für $B = B' \pmod{m}$, d.h. die Mengen B und B' stimmen bis auf eine Menge vom Maß 0 überein, häufig auch nur $B = B'$.

(1.3) DEFINITION

Zwei Strömungen $(\Omega, \mathcal{L}, m, (T_t)_{t \in \mathbb{R}})$, $(\Omega', \mathcal{L}', m', (T'_t)_{t \in \mathbb{R}})$ heißen (maßtheoretisch) isomorph, wenn es invariante Mengen $\Omega_0 \in \mathcal{L}$, $\Omega'_0 \in \mathcal{L}'$ mit $m(\Omega_0) = m'(\Omega'_0) = 1$ und eine eindeutige meßbare Abbildung

$$\varphi : \Omega_0 \longrightarrow \Omega'_0$$

gibt, derart, daß φ^{-1} meßbar und $\varphi m = m'$ ist, sowie

$$\varphi \circ T_t = T'_t \circ \varphi$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Wir beschreiben nun einen Typ von Strömungen, der als Strömung unter einer Funktion bezeichnet wird.

Sei $(D, \mathcal{D}, \mu)$ ein Maßraum und $T : D \longrightarrow D$ eine $(\text{mod } m)$ eindeutige, maßtreue Abbildung von D auf sich, dann nennen wir $(D, \mathcal{D}, \mu, T)$ ein (diskretes) dynamisches System.

Sei $(E, \mathcal{E}, \eta, T)$ ein solches System, wobei wir auch $\eta(E) = \infty$ zulassen, und $f : E \longrightarrow]0, \infty[$ eine η -integrierbare Funktion, die der folgenden Forderung genügt

$$(\times) \quad \sum_{k=0}^{\infty} f(T^k y) = \sum_{k=0}^{\infty} f(T^{-k} y) = +\infty \quad (y \in E).$$

Bildet man über $(E, \mathcal{L}, \eta)$ den Produktmaßraum $E \times [0, \infty[$ mit dem Lebesgueschen Maß auf der positiven Halbachse und schränkt diesen Raum auf

$M = \{(y, x) \mid y \in E, 0 \leq x < f(y)\} \subset E \times [0, \infty[$ ein, so gewinnt man einen Maßraum $(M, \mathcal{L}, m)$ mit Gesamtmasse

$$m(M) = \int_E f(y) \eta(dy) .$$

Wir wollen stets $m(M) = 1$ voraussetzen. $(E, \mathcal{L}, \eta)$ werde als Basismaßraum, T als Basistransformation bezeichnet. T definiert nun in naheliegender Weise eine Strömung $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ auf $(M, \mathcal{L}, m)$:

$$T_t(y, x) = (T^n y, t+x - \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k y))$$

$$\text{für } \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k y) - x \leq t < \sum_{k=0}^n f(T^k y) - x \quad (n > 0)$$

$$T_t(y, x) = (y, t+x)$$

$$\text{für } -x \leq t < i(y) - x$$

$$T_t(y, x) = (T^{-n} y, t+x + \sum_{k=1}^n f(T^{-k} y))$$

$$\text{für } -\sum_{k=1}^n f(T^{-k} y) - x \leq t < -\sum_{k=1}^{n-1} f(T^{-k} y) - x \quad (n > 0).$$

Jedes $T_t: M \rightarrow M$ ($t \in \mathbb{R}$) ist eineindeutig, meßbar und maßtreu mit Inversem $T_t^{-1} = T_{-t}$. Man beachte, daß die Forderung $(\times)$ bezüglich f notwendig ist, damit T_t für jedes t erklärt wird.

$(M, \mathcal{L}, m, (T_t)_{t \in \mathbb{R}})$ ist eine meßbare Strömung (vgl. Jacobs [1] S.89) und außerdem eine P-Strömung, d.h.

zu $B \in \mathcal{L}$ mit $m(B) > 0$ existiert eine Teilmenge $B_0 \subset B$, $B_0 \in \mathcal{L}$ und ein $t_0 \in \mathbb{R}$ derart, daß $m(\complement B_0 \cap T_{t_0} B_0) > 0$ ist, wobei $\complement B_0$ das Komplement von B_0 bezeichne.

Ambrose-Kakutani [1] charakterisieren die Struktur zeitkontinuierlicher Strömungen mit Hilfe von Strömungen unter Funktionen. Es gilt:

(1.4) SATZ

Jede P-Strömung ist isomorph zu einer Strömung unter einer Funktion.

P-Strömungen sind dadurch gekennzeichnet, daß innerhalb jeder Menge positiven Maßes eine echte Bewegung stattfindet. Das extreme Gegenteil sind Strömungen, deren meßbare Mengen (mod m) alle invariant sind. Wir bezeichnen diese als CP-Strömungen. Durch diese beiden Typen werden aber bereits alle Strömungen erfaßt, denn es gilt nach Ambrose-Kakutani [1]:

(1.5) SATZ

Sei $(\Omega, \mathcal{L}, m, (T_t)_{t \in \mathbb{R}})$ eine meßbare Strömung, dann läßt sich Ω in zwei disjunkte, invariante Teilräume $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{L}$ zerlegen, derart, daß $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ auf Ω_1 eine P- und auf Ω_2 eine CP-Strömung ist.

CP-Strömungen sind von untergeordnetem Interesse. Ambrose-Kakutani [1] zeigen, daß unter geringen Regularitätsforderungen an den Raum Ω , die für Lebesgueräume erfüllt

sind, eine CP-Strömung (mod m) isomorph zur identischen Strömung auf dem gegebenen Maßraum ist.

Wir wollen nun Voraussetzungen untersuchen, unter denen eine Strömung nach (1.4) als Strömung unter einer Funktion angenommen werden kann.

Ein dynamisches System $(D, \mathcal{S}, \mu, T)$ heißt periodisch an einer Stelle $y \in D$, wenn eine ganze Zahl n existiert mit $T^n y = y$. $(D, \mathcal{S}, \mu, T)$ heißt aperiodisch, wenn die Menge der periodischen Punkte das Maß 0 hat. Aperiodische dynamische Systeme auf Lebesgueschen Maßräumen haben die beiden folgenden Eigenschaften (Rokhlin [1]):

(1.6) LEMMA

(1) Zu jedem $\delta > 0$ existiert eine Menge $D_1 \in \mathcal{S}$ vom Maß kleiner als δ , derart, daß endlich viele der $T^k D_1$ ganz D überdecken.

(2) Zu jeder natürlichen Zahl n und jedem $\delta > 0$ existiert eine Menge $D_2 \in \mathcal{S}$, derart, daß die Mengen $D_2, T D_2, \dots, T^{n-1} D_2$ paarweise disjunkt sind und das Komplement ihrer Vereinigung ein Maß kleiner als δ besitzt.

Es ist unmittelbar klar, daß die Aperiodizität einer Strömung $(\Omega, \mathcal{L}, m, (T_t)_{t \in \mathbb{R}})$ die Aperiodizität des dynamischen Systems $(\Omega, \mathcal{L}, m, T_{t_0})$ für jedes $t_0 \neq 0$ nach sich zieht.

(1.7) SATZ

Jede aperiodische Strömung $(\Omega, \mathcal{L}, m, (T_t)_{t \in \mathbb{R}})$ ist eine P-Strömung.

Beweis:

Sei $B \in \mathcal{L}$ mit $m(B) > 0$ gegeben. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n^{-1} < m(B) \cdot 4^{-1}$, $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < m(B) \cdot 4^{-1}$ und $t_0 \neq 0$. Nach (1.6) (2) existiert ein $B_0 \in \mathcal{L}$ derart, daß die Mengen $B_0, T_{t_0} B_0, \dots, T_{(n-1)t_0} B_0$ paarweise disjunkt sind und

$$m\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} T_{kt_0} B_0\right) > 1 - \varepsilon$$

gilt. Da $m(T_{(n-1)t_0} B_0) < n^{-1} < m(B) 4^{-1}$ ist, existiert ein $k_0, 0 \leq k_0 < n-1$, mit $m(T_{k_0 t_0} B_0 \cap B) > 0$. Es gilt

$$T_{t_0}(T_{k_0 t_0} B_0 \cap B) \subset \bigcap (T_{k_0 t_0} B_0 \cap B),$$

daraus folgt

$$\begin{aligned} & m(T_{t_0}(T_{k_0 t_0} B_0 \cap B) \cap \bigcap (T_{k_0 t_0} B_0 \cap B)) \\ &= m(T_{k_0 t_0} B_0 \cap B) > 0. \end{aligned}$$

(1.8) COROLLAR

Jede aperiodische Strömung ist isomorph zu einer Strömung unter einer Funktion.

Einfache Beispiele zeigen, daß man bei der Darstellung einer P-Strömung als Strömung unter einer Funktion im allgemeinen einen Basismaßraum mit unendlichem Maß benötigt. Bei aperiodischen Strömungen kommt man jedoch mit einem Basismaßraum von endlichem Maß aus. Dies

soll im folgenden gezeigt werden. Wir beschreiben hierzu zunächst ein Verfahren (vgl. Jacobs [2] 'shrinking the base') mit Hilfe dessen eine Strömung unter einer Funktion isomorph in eine solche mit einem Basismaßraum von kleinerem Maß übergeführt wird.

(1.9) LEMMA

Sei $(M, \mathcal{L}, m, (T_t)_{t \in \mathbb{R}})$ eine Strömung unter einer Funktion mit Basis $(E, \mathcal{L}, \eta)$, wobei $\eta(E) < +\infty$.

Zur Basistransformation T existiere eine Menge

$E_0 \in \mathcal{L}$ mit $0 < \eta(E_0) < \eta(E)$ derart, daß

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} T^k E_0 = E.$$

Dann gibt es eine Strömung über der Basis $(E_0, \mathcal{L}_0, \eta_0)$,

die zur ursprünglichen isomorph ist. $\mathcal{L}_0, \eta_0$ be-

zeichne dabei die Restriktionen von $\mathcal{L}, \eta$ auf E_0 .

Beweis:

T induziert η -fast sicher eine Abbildung $T_0: E_0 \rightarrow E_0$.

Sei nämlich für $k \geq 1$

$$E_0^k = \{y \in E_0 \mid T^j y \notin E_0 \ (1 \leq j < k), \ T^k y \in E_0\},$$

so setzen wir

$$T_0 y = T^k y \quad \text{für } y \in E_0^k.$$

Bekannte Rekurrenzigenschaften (Poincaré, vgl. Jacobs [3])

besagen $E_0 = \sum_{k=1}^{\infty} E_0^k \pmod{\eta}$. T_0 ist somit vollständig erklärt und außerdem η_0 -maßtreu.

Eine geeignete Funktion f_0 über der Basis $(E_0, \mathcal{L}_0, \eta_0)$

ist gegeben durch

$$f_0(y) = \sum_{j=0}^{k-1} f(T^j y) \quad \text{für } y \in E_0^k.$$

Da die Iterierten von E_0 unter T ganz E überdecken, ist unmittelbar klar, daß die Strömung über $(E_0, \mathcal{L}_0, \eta_0)$ unter der Funktion f_0 zur ursprünglichen isomorph ist.

Sei $(M, \mathcal{L}, m, (T_t)_{t \in \mathbb{R}})$ eine aperiodische Strömung unter einer Funktion mit Basis $(E, \mathcal{L}, \eta)$ von endlichem Maß $\eta(E)$ und Basistransformation T . $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ist genau dann aperiodisch, wenn T aperiodisch ist. Nach (1.6) (1) existiert somit zu jedem $\delta > 0$ eine Menge $E_0 \in \mathcal{L}$ mit $\eta(E_0) < \delta$ und $\bigcup_{k=0}^n T^k E_0 = E$ für ein passendes n . Wir können (1.9) anwenden und die Strömung über einer Basis vom Maß kleiner als δ darstellen. Analysiert man den Beweis zu (1.4) (Ambrose-Kakutani [1]), so findet man, daß sich jede P -Strömung als abzählbare Summe von Strömungen unter Funktionen darstellen läßt, derart, daß jeder Summand $(M_k, \mathcal{L}_k, m_k, (T_t^k)_{t \in \mathbb{R}})$ ($k \in \mathbb{N}$) eine Strömung über einer Basis $(E_k, \mathcal{L}_k, \eta_k)$ von endlichem Maß $\eta_k(E_k)$ ist. Mit $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ist auch jeder Summand $(T_t^k)_{t \in \mathbb{R}}$ ($k \in \mathbb{N}$) aperiodisch und wir finden zu vorgegebenem $\delta > 0$, $k \in \mathbb{N}$ Mengen $F_0^k \in \mathcal{L}_k$ mit $\eta_k(F_0^k) < \delta \cdot 2^{-k}$ derart, daß jeweils endlich viele Iterierte von F_0^k unter der Basistransformation T ganz E_k überdecken. $F_0 = \bigcup_{k \geq 1} F_0^k$ erfüllt $\eta(F_0) < \delta$ und schöpft unter T ganz E aus.

Zusammenfassend ergibt sich

(1.10) SATZ

Jede aperiodische Strömung ist isomorph zu einer Strömung unter einer Funktion, wobei die Basis mit beliebig kleinem endlichem Maß angenommen werden kann.

Hat man den vorstehenden Satz erreicht, so kann man der Darstellung noch zusätzliche Eigenschaften aufzwingen, die bereits von Ornstein [1] im Fall von Bernoulli-Strömungen verwendet werden.

(1.11) COROLLAR

Seien $C > 0$ und $\varepsilon > 0$ gegeben, dann ist jede aperiodische Strömung isomorph zu einer Strömung unter einer Funktion f derart, daß $f \leq C$ und $f = C$, außer auf einer Menge vom Maß kleiner als ε .

Beweis:

Nach (1.10) existiert eine Basis $(E, \mathcal{L}, \eta)$ mit $\eta(E) < \varepsilon$.

Setze für $k \geq 0$

$$E_k = \{ y \in E \mid kC \leq f(y) < (k+1)C \}$$

und

$$E'_k = \bigcup_{j=0}^k T_j C E_k, \quad ,$$

dann hat die Strömung über der Basis $E' = \bigcup_{k \geq 0} E'_k$ die obigen Eigenschaften.

Abschließend soll noch der Zusammenhang zwischen Ergodizität und Aperiodizität geklärt werden. Wir definieren zunächst auf dem halboffenen Einheitsintervall $[0,1[$ die (periodische) Rotation

$$R_t : x \longrightarrow x + t \mod 1 \quad (t \in \mathbb{R}) .$$

Bekanntlich existiert genau ein $(R_t)_{t \in \mathbb{R}}$ - invariantes, normiertes Maß auf $[0,1[$, nämlich das Lebesguesche Maß λ (vgl. Bauer [1]) .

(1.12) SATZ

Jede ergodische Strömung $(\Omega, \mathcal{L}, m, (T_t)_{t \in \mathbb{R}})$ ist entweder aperiodisch oder isomorph zu $([0,1[, \lambda, (R_t)_{t \in \mathbb{R}})$.

Beweis:

$(\Omega, \mathcal{L}, m, (T_t)_{t \in \mathbb{R}})$ läßt sich als Strömung unter einer Funktion mit einem Basismaßraum von endlichem Maß darstellen (vgl. Ambrose [1]). Da $(\Omega, \mathcal{L}, m)$ ein Lebesguescher Maßraum ist, ist der Basismaßraum $(E, \mathcal{E}, \eta)$ bis auf Isomorphie ein Intervall $(J, \mathcal{I}, \eta_1)$ - η_1 Lebesguesches Maß - vereinigt mit höchstens abzählbar vielen Punktmassen $(\gamma_k)_{k \geq 1}$.

Die Menge P der periodischen Punkte ist invariant, somit $m(P) = 0$ oder $m(P) = 1$. $m(P) = 0$ bedeutet gerade Aperiodizität. Im Fall $m(P) = 1$ ist $\Omega = P = \sum_{t > 0} P_t$, wobei

$$P_t = \{ w \in \Omega \mid T_t w = w , T_s w \neq w \ (0 < s \leq t) \} .$$

Da die Basistransformation T maßtreu ist, läßt sich P

in diesem Fall in zwei disjunkte invariante Teilräume zerlegen:

Q , die Menge der Punkte über J und

Q' , die Menge der Punkte über $(y_k)_{k \geq 1}$.

Ist $m(Q) > 0$, so gibt es invariante Teilräume Q_1 mit

$$0 < m(Q_1) < m(Q) ,$$

was der Ergodizität von $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ widerspricht.

Ist $m(Q') > 0$, so ist wegen Ergodizität $m(P_{t_0}) = 1$ für

ein $t_0 > 0$; daraus folgt sofort die Isomorphie zu

$$([0, 1[, \lambda, (R_t)_{t \in \mathbb{R}}) .$$

§ 2 Erzeuger vom endlichen Typ

Sei $(\Omega, \mathcal{L}, m)$ ein Lebesguescher Maßraum. Eine Familie $\pi = \{P_i \mid i \in I\}$ paarweise disjunkter Teilmengen von Ω heißt eine Zerlegung von Ω , wenn $\Omega = \sum_{i \in I} P_i$.

Wir werden nur Zerlegungen betrachten, deren Elemente meßbare Mengen sind. Ist $\emptyset \neq \Omega_0 \subset \Omega$ eine Teilmenge von Ω , so induziert π eine Zerlegung

$$\pi \cap \Omega_0 = \{P_i \cap \Omega_0 \mid i \in I\}$$

auf Ω_0 . Mit $\{\pi \cap \Omega_0, \ell(\Omega_0)\}$ bezeichnen wir die Zerlegung von Ω , die aus den Elementen von $\pi \cap \Omega_0$, vermehrt um $\ell(\Omega_0)$, besteht.

Jede Zerlegung π erzeugt eine σ -Unteralgebra $\mathcal{A}(\pi)$ von $\mathcal{L}$.

Wir sagen π umfaßt γ , $\pi \supset \gamma$, wenn die Elemente von γ in der von π erzeugten σ -Algebra liegen. Ist π^j ($j \in J$) ein System von Zerlegungen, so bezeichne $\bigvee_{j \in J} \pi^j$ die größte Zerlegung, die alle π^j umfaßt, d.h. ist π' eine Zerlegung, die alle π^j ($j \in J$) umfaßt, so folgt $\pi' \supset \bigvee_{j \in J} \pi^j$.

$\bigvee_{j \in J} \pi^j$ heißt die gemeinsame Verfeinerung der π^j ($j \in J$).

Sei $(\Omega, \mathcal{L}, m, T)$ ein dynamisches System und $\pi = \{P_i \mid i \in I\}$ eine Zerlegung von Ω . π heißt ein Erzeuger (für T),

wenn $\mathcal{L}$ von $\bigvee_{k \in \mathbb{Z}} T^k \pi$ erzeugt wird (d.h. zu jedem $B \in \mathcal{L}$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und ein B' in der von $\bigvee_{k=-n}^n T^k \pi$ erzeugten σ -Algebra derart, daß $m(B \Delta B') < \varepsilon$ ist, wobei Δ die symmetrische Differenz bezeichnet).

Endliche Zerlegungen und endliche Unteralgebren von $\mathcal{L}$ entsprechen einander in eindeutiger Weise.

Sind $\pi = \{P_1, \dots, P_n\}$ und $\gamma = \{Q_1, \dots, Q_n\}$ endliche Zerlegungen, so definieren wir

$$d(\pi, \gamma) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^n m(P_k \triangle Q_{\sigma(k)}) \mid \sigma \in \mathcal{S}_n \right\},$$

wobei $\mathcal{S}_n$ die Permutationen von $\{1, \dots, n\}$ bezeichnet. $d(\pi, \gamma)$ ist auch dann noch erklärt, wenn die Anzahl der Elemente von π verschieden von der von γ ist. Man fügt in diesem Fall einer der beiden Zerlegungen endlich viele Exemplare der leeren Menge hinzu. Wir sagen π umfaßt γ bis auf ε , $\pi \overset{\varepsilon}{\supset} \gamma$, wenn es eine Zerlegung γ' gibt, derart, daß $\pi \supset \gamma'$ und $d(\gamma, \gamma') < \varepsilon$ gilt.

Sei $(\Omega, \mathcal{L}, m, (T_t)_{t \in \mathbb{R}})$ eine Strömung, $w \in \Omega$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. $O(w) = \{T_t w \mid t \in \mathbb{R}\}$ heißt die Bahn von w .

Für das Bahnstück $\{T_t w \mid t \in I\}$ schreiben wir kurz $T_I w$.

Sei $\Omega_0 \subset \Omega$ und $w \in \Omega_0$, dann definieren wir

$$l(\Omega_0, w) = \sup \left\{ s \mid \text{es existiert } I \subset \mathbb{R}, 0 \in I, \right. \\ \left. |I| = s \text{ und } T_I w \subset \Omega_0 \right\}.$$

$$l(\Omega_0) = \inf_{w \in \Omega_0} l(\Omega_0, w)$$

heißt die Mindestaufenthaltszeit von $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ in Ω_0 .

(2.1) DEFINITION

Eine Zerlegung $\pi = \{P_i \mid i \in I\}$ besitzt positive Aufenthaltszeiten (bzgl. $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$), wenn $l(P_i) > 0$ für alle $i \in I$ ist.

Seien $I = [a, b]$ und $I' = [a', b']$ abgeschlossene Intervalle in $\mathbb{R}$, so schreiben wir

$$e(I, I') = \begin{cases} 0 & \text{falls } I \cap I' \neq \emptyset \\ a'-b & \text{falls } I \cap I' = \emptyset \text{ und } b \leq a' \\ a-b' & \text{falls } I \cap I' = \emptyset \text{ und } b' \leq a \end{cases}$$

$e(I, I')$ werde analog definiert, wenn I oder I' ein offenes bzw. halboffenes Intervall ist.

(2.2) LEMMA

Seien $N_1, \dots, N_n$ natürliche Zahlen mit $N_1 \geq 9$,
 $N_i \geq 3N_{i-1}$ ($2 \leq i \leq n$), $c > 0$ und $I_k^i \subset \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq n$,
 $k \in \mathbb{Z}$) disjunkte Intervalle der Länge c , derart, daß
 $e(I_k^i, I_l^j) \geq 2^{-1}c$ für $i \neq j$ oder $k \neq l$. Für jedes i
 seien die $(I_k^i)_{k \in \mathbb{Z}}$ auf $\mathbb{R}$ mit k aufsteigend geordnet
 und zwar so, daß $e(I_{k-1}^i, I_k^i) \geq (N_i - 1)c$ ($k \in \mathbb{Z}$) gilt;
 dann gibt es eine natürliche Zahl q und ein Inter-
 vall $I \subset [0, qc]$ der Länge $2c$, derart, daß für alle
 $(i, k) \in \{1, \dots, n\} \times \mathbb{Z}$

$$e(I, I_k^i) \geq 2^{-1}c$$

ist.

Beweis:

Angenommen für alle $q \in \mathbb{N}$ und Intervalle $I \subset [0, qc]$ der
 Länge $2c$ gilt $e(I, I_k^i) < 2^{-1}c$ für ein passendes Paar (i, k) ;
 dann haben wir für $q = 3N_n$

$$\begin{aligned} & \left| \{(i, k) \in \{1, \dots, n\} \times \mathbb{Z} \mid I_k^i \subset [0, 3N_n c]\} \right| \\ & \geq 4^{-1} \cdot 3N_n - 2 > 2^{-1}N_n. \end{aligned}$$

Andererseits ergibt sich aus den Voraussetzungen für jede
 einzelne Intervallfolge $(I_k^i)_{k \in \mathbb{Z}}$

$$|\{k \in \mathbb{Z} \mid I_k^i \subset [0, 3N_n c]\}| \leq 3^{-i} N_n$$

und somit insgesamt

$$\begin{aligned} & |\{(i, k) \in \{1, \dots, n\} \times \mathbb{Z} \mid I_k^i \subset [0, 3N_n c]\}| \\ & \leq \sum_{i=1}^n 3^{-i} N_n < 2^{-1} N_n. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch.

Man beachte, daß q in (2.2) nur von den N_i ($1 \leq i \leq n$), nicht aber von der speziellen Verteilung der Intervalle abhängt.

(2.3) DEFINITION

Sei $(M, \mathcal{L}, m, (T_t)_{t \in \mathbb{R}})$ eine Strömung unter einer Funktion über der Basis $(E, \mathcal{E}, \eta)$, dann heißt eine Menge $R \in \mathcal{L}$ rechteckig, wenn R von der Form ist

$$R = \{(y, x) \mid y \in E_0, x \in I\},$$

wobei $E_0 \in \mathcal{E}$ und I ein offenes, abgeschlossenes oder halboffenes Intervall positiver Länge bezeichne.

Endliche Vereinigungen rechteckiger Mengen heißen rechteckig zusammengesetzt.

Man sieht unmittelbar, daß rechteckig zusammengesetzte Mengen strikt positive Mindestaufenthaltszeiten besitzen. Ist eine Menge R in einer gegebenen Darstellung der Strömung unter einer Funktion rechteckig zusammengesetzt, so gilt dies im allgemeinen nicht mehr für das Bild von R in einer neuen Darstellung. Unverändert bleibt jedoch die konstante Strömungsgeschwindigkeit 1 und damit $l(R)$.

(2.4) LEMMA

Sei $(M, \mathcal{L}, m, (T_t)_t \in \mathbb{R})$ eine aperiodische Strömung unter einer Funktion, $t_0 > 0$ und $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\epsilon_{n+1} < \epsilon_n$, $\epsilon_n > 0$ eine Nullfolge, dann existieren Mengen $R_n \in \mathcal{L}$ und natürliche Zahlen N_n, L_n ($n \in \mathbb{N}$) derart, daß folgendes gilt

$$(1) \quad m(R_n) < \epsilon_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$(2) \quad m\left(\bigcup_{i=-N_n}^{L_n} T_{it_0} R_n\right) > 1 - \epsilon_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$(3) \quad R_n \cap R_m = \emptyset \quad (n \neq m)$$

$$(4) \quad l(R_n) = t_0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$l(\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n) \geq (N_n + L_n) \cdot t_0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$l\left(\bigcup_{m=1}^n R_m\right) \geq t_0 \cdot 2^{-1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

(5) zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Darstellung der Strömung, in der die (disjunkten) Mengen $T_{it_0} R_n$ ($-N_n \leq i \leq L_n$) rechteckig zusammengesetzt sind.

Beweis:

Wir konstruieren $R_n \in \mathcal{L}$ und $N_n, L_n \in \mathbb{N}$ induktiv.

Wir wählen ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $(2N_1)^{-1} < \epsilon_1$ und $N_1 \geq 9$.

Nach (1.11) läßt sich die Strömung über einer Basis

$(E_1, \mathcal{L}_1, \eta_1)$ und unter einer Funktion g_1 darstellen,

derart daß

$$g_1(y) = (2N_1 + 1) \cdot t_0 \quad \text{für } y \in F_1$$

$$g_1(y) \leq (2N_1 + 1) \cdot t_0 \quad \text{für } y \in E_1 \setminus F_1,$$

wobei $\eta_1(E_1 \setminus F_1) \leq \delta_1$ für ein $\delta_1 < (2N_1 + 1)^{-2} \cdot t_0^{-1}$.

Wir definieren

$$R_1 = \{(y, x) \mid y \in F_1, N_1 t_0 \leq x < (N_1 + 1) t_0\}$$

und $L_1 = N_1$, dann gilt

$$m(R_1) \leq (2N_1 + 1)^{-1} < \varepsilon_1$$

$$m\left(\bigcup_{i=-N_1}^{L_1} T_{it_0} R_1\right) \geq 1 - (2N_1 + 1) \cdot t_0 \delta_1 > 1 - \varepsilon_1.$$

Man sieht ferner unmittelbar, daß

$$l(R_1) = t_0, \quad l\left(\bigcup_{i=-N_1}^{L_1} T_{it_0} R_1\right) \geq (N_1 + L_1) \cdot t_0$$

ist und die (disjunkten) Mengen $T_{it_0} R_1$ ($-N_1 \leq i \leq L_1$) rechteckig sind.

Seien $R_i \in \mathcal{L}$ und $N_i, L_i \in \mathbb{N}$ ($1 \leq i \leq n-1$) konstruiert.

Wir können $N_i \geq 3N_{i-1}$ ($2 \leq i \leq n-1$) annehmen und bestimmen nach (2.2) zu $c = t_0$ und irgendeinem System von Intervallen $I_k^i \subset \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq n-1, k \in \mathbb{Z}$) mit den dort angegebenen Eigenschaften ein $q_n \in \mathbb{N}$.

Wir wählen $N_n \in \mathbb{N}$ mit $N_n \geq q_n$, $N_n \geq 3N_{n-1}$ und

$$(q_n + 1)(2N_n + 1)^{-1} < \varepsilon_n.$$

Nach (1.11) läßt sich die Strömung über einer Basis

$(E_n, \mathcal{L}_n, \eta_n)$ und unter einer Funktion g_n darstellen,

derart daß

$$\begin{aligned} g_n(y) &= (2N_n + 1) \cdot t_0 & \text{für } y \in F_n \\ g_n(y) &\leq (2N_n + 1) \cdot t_0 & \text{für } y \in E_n \setminus F_n, \end{aligned}$$

wobei $\eta_n(E_n \setminus F_n) \leq \delta_n$ für ein $\delta_n < (2N_n + 1)^{-2} \cdot t_0^{-1}$.

Die neue Darstellung wird durch Abbildung mittels eines maßtheoretischen Isomorphismuses φ erreicht, bei der

$l(R_1)$ unverändert bleibt. Wir bezeichnen das Bild unter

φ wiederum mit $(M, \mathcal{L}, m, (T_t)_{t \in \mathbb{R}})$, insbesondere also

auch $\varphi(R_i)$ mit R_i ($1 \leq i \leq n-1$).

Sei für $1 \leq i \leq n-1$

$$G_i = \{ y \in F_n \mid T_{[-t_0, \infty[}(y, N_n t_0) \cap R_i \neq \emptyset \},$$

dann setzen wir für $y \in G_i$

$$s_1(y, i) = \inf \{ -2t_0 < t < \infty \mid T_t(y, N_n t_0) \in R_i \}$$

$$s_2(y, i) = \inf \{ s_1(y, i) + t_0 < t < \infty \mid T_t(y, N_n t_0) \in R_i \}$$

etc.

$s_k(y, i)$ bezeichnet die Eintrittszeiten des Punktes

$(y, N_n t_0)$ längs des Bahnstückes $T_{]-2t_0, \infty[}(y, N_n t_0)$ in R_i

und existiert auf G_i nach Poincaré's Wiederkehrrsatz

(vgl. Jacobs [3]) für alle $k \geq 1$.

Wir können die Definition der Funktionen

$$s_k(\cdot, i) : G_i \longrightarrow [-2t_0, \infty[$$

abbrechen, wenn wir $s_k(y, i) \geq N_n t_0$ auf ganz G_i erreicht

haben. Dies ist spätestens für $k = [(N_n + 1) \cdot N_1^{-1}] + 1$

der Fall, wobei $[a]$ die größte ganze Zahl bezeichnet,

die kleiner oder gleich a ist.

Sei für $y \in G_i$

$$I_k^i(y) = [s_k(y, i), s_k(y, i) + t_0[.$$

Nach Induktionsvoraussetzung (4) erfüllt das (evtl. leere)

System der Intervalle $I_k^i(y)$ ($1 \leq i \leq n-1$) für jedes $y \in F_n$

die Voraussetzungen von (2.2).

(Die Verteilung von Intervallen außerhalb von $]-2t_0, N_n t_0]$

ist nicht wesentlich; man kann sich das System dort in

für (2.2) passender Weise ergänzt denken.)

Somit sind die Mengen

$$S(y) = \{ a'(y) \in \mathbb{R} \mid I'(y) = [a'(y), a'(y) + 2t_0[\subset [0, q_n t_0], \\ e(I'(y), I_k^i(y)) \geq t_0 \cdot 2^{-1} \text{ für alle} \\ 1 \leq i \leq n-1, k \in \mathbb{Z} \}$$

für $y \in F_n$ nicht leer und es existiert

$$a(y) = \inf S(y) \quad (y \in F_n).$$

Wir setzen

$$I(y) = [a(y), a(y) + 2t_0[$$

und definieren induktiv

$$C_n^0 = \emptyset$$

$$C_n^j = \{ y \in F_n \setminus C_n^{j-1} \mid I(y) \supset [(j-1)t_0, jt_0[\}$$

für $1 \leq j \leq q_n$, dann folgt

$$C_n^i \cap C_n^j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

$$\sum_{j=1}^{q_n} C_n^j = F_n.$$

$$Y_n = \{ C_n^j, E_n \setminus F_n \mid 1 \leq j \leq q_n \}$$

ist eine Zerlegung von E_n in meßbare Mengen. Sei für

$$1 \leq j \leq q_n$$

$$R_n^j = \{ (y, x) \mid y \in C_n^j, (N_n + j - 1)t_0 \leq x < (N_n + j)t_0 \}$$

dann folgt

$$R_n^j \cap R_i = \emptyset \quad (1 \leq j \leq q_n, 1 \leq i \leq n-1).$$

Wir setzen

$$R_n = \sum_{j=1}^{q_n} R_n^j$$

und erhalten

$$(1) \quad m(R_n) = m(\{ (y, x) \mid y \in F_n, N_n t_0 \leq x < (N_n + 1)t_0 \}) \\ < (2N_n + 1)^{-1} < \varepsilon_n$$

$$(2) \quad \text{für } L_n = N_n - q_n$$

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{i=-N_n}^{L_n} T_{it_0} R_n\right) &> 1 - q_n(2N_n+1)^{-1} - (2N_n+1)t_0\delta_n \\ &> 1 - \varepsilon_n \end{aligned}$$

(3) aus der Definition der Zerlegung γ_n folgt

$$R_n \cap R_i = \emptyset \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

(4) unmittelbar klar ist $l(R_n) = t_0$, $l(\bigcup_{m=1}^n R_m) \geq (N_n + L_n)t_0$;
aus der Definition von $S(y)$ bzw. γ_n ergibt sich

$$l\left(\bigcup_{m=1}^n R_m\right) \geq t_0 2^{-1}$$

(5) R_n und damit alle $T_{it_0} R_n$ ($-N_n \leq i \leq L_n$) sind rechteckig zusammengesetzte Mengen.

(2.5) BEMERKUNGEN

Man beweist (2.4) analog für $t_0 < 0$. Unter (4) hat dann natürlich $|t_0|$ anstelle von t_0 zu stehen.

Betrachten wir $\wp_n = \{R_n, [R_n]\}$, die Zerlegungen bestehend aus R_n und dem jeweiligen Komplement, so ergibt sich aus (2.4) (3), (4) unmittelbar, daß

$\wp = \bigvee_{n \geq 1} \wp_n$ eine Zerlegung von M mit positiven Aufenthaltszeiten ist.

Nach (2.4) (1) und (3) existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Menge $B_\varepsilon \in \mathcal{L}$ mit $m(B_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ und $\wp \cap B_\varepsilon$ ist eine endliche Zerlegung von B_ε . Daraus folgt, daß $\wp$ nur abzählbar viele Elemente hat.

(2.6) DEFINITION

Sei $(\Omega, \mathcal{L}, m, (T_t)_{t \in \mathbb{R}})$ eine meßbare Strömung. Eine meßbare Zerlegung $\pi = \{P_i \mid i \in I\}$ heißt ein Erzeuger vom endlichen Typ (für $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$),

wenn folgendes gilt:

- (1) Es gibt ein $t_0 \in \mathbb{R}$, so daß π Erzeuger für T_{t_0} ist
- (2) π besitzt positive Aufenthaltszeiten
- (3) Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall endlicher Länge, so ist für alle $w \in \Omega \pmod{m}$ $T_I w \cap P_i \neq \emptyset$ nur für endlich viele $i \in I$ (d.h. jedes endliche Bahnstück schneidet nur endlich viele Zerlegungselemente an).

(2.7) SATZ

Jede aperiodische Strömung $(\Omega, \mathcal{L}, m, (T_t)_{t \in \mathbb{R}})$ hat einen abzählbaren Erzeuger vom endlichen Typ.

$t_0 \neq 0$ kann dabei beliebig vorgegeben werden.

Beweis:

Wir werden einen Erzeuger π als gemeinsame Verfeinerung von endlichen Zerlegungen π_n ($n \geq 1$) gewinnen und definieren π_n induktiv. Nach (1.10) ist $(\Omega, \mathcal{L}, m, (T_t)_{t \in \mathbb{R}})$ eine Strömung unter einer Funktion über einer Basis von endlichem Maß.

Seien $t_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 \neq 0$ und eine Nullfolge $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$, $\varepsilon_n > 0$ gegeben.

Wähle $N_1 \in \mathbb{N}$ und die Darstellung von $(\Omega, \mathcal{L}, m, (T_t)_{t \in \mathbb{R}})$ über einer Basis $(E_1, \mathcal{E}_1, \eta_1)$ und unter der Funktion g_1 wie in (2.4). Sei $(\sigma_j)_{j \geq 1}$, $\sigma_1 = [F_1, E_1 \setminus F_1]$, $\sigma_j \subset \sigma_{j+1}$ eine gegen die Zerlegung von E_1 in Punkte $(\text{mod } m)$ aufsteigende Folge endlicher Zerlegungen von E_1 , dann erzeugt $\bigvee_{j \geq 1} \sigma_j$ die σ -Algebra $\mathcal{E}_1$.

Wir definieren zu $\sigma_j = \{s_{j,1}, \dots, s_{j,r_j}\}$

$$A_{j,i}^k = \{(y,x) \mid y \in s_{j,i}, kt_0 \cdot 10^{-(j+1)} \leq x < (k+1)t_0 \cdot 10^{-(j+1)}\}$$

$$(j \geq 1, 1 \leq i \leq r_j, 0 \leq k < (2N_1+1) \cdot 10^{j+1}),$$

dann ist

$$\alpha_{1,j} = \{A_{j,i}^k \cap \Omega \mid 1 \leq i \leq r_j, 0 \leq k < (2N_1+1) \cdot 10^{j+1}\}$$

für $j \geq 1$ eine aufsteigende Folge von Zerlegungen, derart,

$$\text{daß } \mathcal{A}(\bigvee_{j \geq 1} \alpha_{1,j}) = \mathcal{L}.$$

Setze $\alpha_1 = \alpha_{1,1}$. Nehmen wir $R_1 \in \mathcal{L}$, $L_1 \in \mathbb{N}$ aus (2.4),

so ist

$$\pi_1 = \{\alpha_1 \cap R_1, R_1\}$$

eine endliche Zerlegung von Ω , die nach (2.4) (2)

$$\bigvee_{i=-N_1}^{L_1} T_{it_0} \pi_1 \stackrel{2\varepsilon_1}{\supset} \alpha_1$$

und - da ihre Elemente rechteckig sind - $1(P_1^1) > 0$

$(P_1^1 \in \pi_1)$ erfüllt.

Wähle $N_n \in \mathbb{N}$ und die Darstellung von $(\Omega, \mathcal{L}, m, (T_t)_{t \in \mathbb{R}})$

über der Basis $(E_n, \mathcal{E}_n, \eta_n)$ und unter der Funktion g_n

wie in (2.4).

Sei $(\tau'_j)_{j \geq 1}$, $\tau'_j \subset \tau'_{j+1}$ eine gegen die Zerlegung von

E_n in Punkte (mod m) aufsteigende Folge endlicher Zer-

legungen von E_n . Wir setzen

$$\tau_j = \tau'_j \vee \gamma_n \quad (j \geq 1),$$

wobei γ_n die in (2.4) definierte Zerlegung bezeichne,

und definieren zu $\tau_j = \{T_{j,1}, \dots, T_{j,1_j}\}$

$$B_{j,i}^k = \{ (y,x) \mid y \in T_{j,i}, kt_0 \cdot 10^{-(j+n)} \leq x < (k+1)t_0 \cdot 10^{-(j+n)} \}$$

$$(j \geq 1, 1 \leq i \leq l_j, 0 \leq k < (2N_n+1) \cdot 10^{(j+n)}),$$

dann folgt:

$$\alpha_{n,j} = \{ B_{j,i}^k \cap \Omega \mid 1 \leq i \leq l_j, 0 \leq k < (2N_n+1) \cdot 10^{(j+n)} \}$$

ist für $j \geq 1$ eine aufsteigende Folge endlicher Zerlegungen mit $\mathcal{A}(\bigvee_{j \geq 1} \alpha_{n,j}) = \mathcal{L}$. Es existiert somit ein $j_n \in \mathbb{N}$ derart, daß

$$\alpha_{n,j_n} \stackrel{\varepsilon_n}{\supset} \alpha_{1,n}.$$

Wir setzen $\alpha_n = \alpha_{n,j_n}$. Für $R_n \in \mathcal{L}$ aus (2.4) ist offensichtlich $T_{it_0} R_n \in \mathcal{A}(\alpha_n)$ ($-N_n \leq i \leq L_n$).

Für $-N_n \leq i \leq L_n$ ist

$$\beta_n^i = \alpha_n \cap T_{it_0} R_n$$

eine Zerlegung von $T_{it_0} R_n$ in rechteckige Mengen.

$$T_{-it_0} : T_{it_0} R_n \longrightarrow R_n$$

führt β_n^i in eine endliche Zerlegung $T_{-it_0} \beta_n^i$ von R_n über, derart, daß

$$T_{-it_0} \beta_n^i = T_{-jt_0} \beta_n^j$$

für $i, j \in \{-N_n, \dots, L_n\}$. Definieren wir $\beta_n = \{ \beta_n^0, \mathcal{C}_{R_n} \}$, so gilt nach (2.4) (2)

$$\bigvee_{i=-N_n}^{L_n} T_{it_0} \beta_n \stackrel{2\varepsilon_n}{\supset} \alpha_n$$

und somit erfüllt auch $\pi_n = \pi_{n-1} \vee \beta_n$

$$\bigvee_{i=-N_n}^{L_n} T_{it_0} \pi_n \supset^{2\varepsilon_n} \alpha_n.$$

Aus (2.4) (3) und (4) ergibt sich $l(P_1^n) > 0$ ($P_1^n \in \pi_n$)

und insbesondere gilt $(\bigcup_{m=1}^n R_m) \in \pi_n$ und

$$l(\bigcup_{m=1}^n R_m) \geq t_0 2^{-1}.$$

$\pi = \bigvee_{n \geq 1} \pi_n$ ist ein abzählbarer Erzeuger vom endlichen Typ.

Wir haben zunächst zu zeigen: zu jedem $B \in \mathcal{L}$ und $\delta > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $A \in \mathcal{A}(\bigvee_{i=-n}^n T_{it_0} \pi)$ derart, daß $m(A \triangle B) < \delta$.

Wir bestimmen zunächst $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $2\varepsilon_n < \delta \cdot 3^{-1}$ für alle $n \geq n_0$. Wegen $\mathcal{A}(\bigvee_{j=1}^n \alpha_{1,j}) = \mathcal{L}$ existiert ein $n_1 \geq n_0$ und ein $B_1 \in \mathcal{A}(\alpha_{1,n_1})$ derart, daß $m(B \triangle B_1) < \delta \cdot 3^{-1}$. Ferner gilt

$$\alpha_{n_1} \supset^{\varepsilon_{n_1}} \alpha_{1,n_1},$$

d.h. es existiert ein $B_2 \in \mathcal{A}(\alpha_{n_1})$ derart, daß

$$m(B_1 \triangle B_2) < \varepsilon_{n_1} < \delta \cdot 3^{-1}.$$

Schließlich folgt aus

$$\bigvee_{i=-N_{n_1}}^{L_{n_1}} T_{it_0} \pi_{n_1} \supset^{2\varepsilon_{n_1}} \alpha_{n_1}$$

die Existenz eines $A \in \mathcal{A}(\bigvee_{i=-N_{n_1}}^{L_{n_1}} T_{it_0} \pi_{n_1})$ derart, daß

$$m(B_2 \triangle A) < 2\varepsilon_{n_1} < \delta \cdot 3^{-1}.$$

Wir haben somit ein $A \in \mathcal{A}(\bigvee_{i=-N_{n_1}}^{N_{n_1}} T_{it_0} \pi)$ mit $m(A \triangle B) < \delta$.

Da jedes β^n positive Aufenthaltszeiten hat, folgt aus (2.4) (3) und (4) unmittelbar, daß auch π positive Aufenthaltszeiten besitzt.

Sei $w \in \Omega$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein endliches Intervall, dann gibt es wegen $l(R_n) = t_0$ ($n \in \mathbb{N}$) und $R_n \cap R_m = \emptyset$ ($n \neq m$) nur endlich viele R_i mit $T_I w \cap R_i \neq \emptyset$. Da aber jedes R_i nur endlich viele Elemente P_j von π umfaßt, ist auch $T_I w \cap P_j \neq \emptyset$ nur für endlich viele $j \in \mathbb{N}$. Aus demselben Grund ergibt sich zusammen mit (2.5) die Abzählbarkeit von π .

(2.8) BEMERKUNG

π wurde zusätzlich so konstruiert, daß die Aufenthaltsintervalle maximaler Länge, d.h. die Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ mit $T_I w \subset P_i$, wobei $|I|$ maximal mit dieser Eigenschaft, stets die Form haben $I = [a, b[$.

§ 3 Einbettung von Strömungen in Funktionenräume

(3.1) DEFINITION

Sei Ω ein kompakter metrischer Raum und $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine einparametrische Schar von Homöomorphismen auf Ω , die $T_t \circ T_s = T_{t+s}$ ($t, s \in \mathbb{R}$) erfüllt, dann heißt $(\Omega, (T_t)_{t \in \mathbb{R}})$ eine stetige Strömung, wenn die Abbildung

$$(w, t) \longrightarrow T_t w$$

von $\Omega \times \mathbb{R}$ in Ω stetig ist.

Sei L^A der Raum der Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit Werten in $[0, 1]$, die der Lipschitzbedingung

$$|f(s) - f(t)| \leq A \cdot |s - t| \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

genügen. Versehen mit der Metrik

$$\|f - g\| = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \left(\sup_{t \in [-k, k]} |f(t) - g(t)| \right)$$

ist L^A ein kompakter topologischer Raum. Wir bezeichnen die von der Topologie erzeugte σ -Algebra mit $\mathcal{A}$. Durch

$$S_t f(s) = f(s+t) \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

ist eine stetige Strömung, die 'shift-Strömung', auf L^A gegeben.

Sei Ω' ein Raum, auf dem eine σ -Algebra $\mathcal{L}'$ und eine einparametrische Schar $(T'_t)_{t \in \mathbb{R}}$ von meßbaren Abbildungen mit $T'_t \circ T'_s = T'_{t+s}$ ($t, s \in \mathbb{R}$) erklärt ist. Wir sagen, eine Strömung $(\Omega, \mathcal{L}, m, (T_t)_{t \in \mathbb{R}})$ läßt sich in $(\Omega', \mathcal{L}', (T'_t)_{t \in \mathbb{R}})$ einbetten, wenn es eine invariante Teilmenge

$\Omega_0 \in \mathcal{L}$ mit $m(\Omega_0) = 1$ und eine eindeutige, meßbare Abbildung

$$\varphi : \Omega_0 \longrightarrow \Omega'$$

gibt, so daß $\varphi \circ T_t = T_t' \circ \varphi$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

φ definiert dann ein Bildmaß φm auf einem $(T_t')_{t \in \mathbb{R}}$ -invarianten Teilraum Ω_0' von Ω' , derart, daß die Strömungen $(\Omega, \mathcal{L}, m, (T_t)_{t \in \mathbb{R}})$ und $(\Omega_0', \mathcal{L}_0', \varphi m, (T_t')_{t \in \mathbb{R}})$ isomorph sind. ($\mathcal{L}_0'$ bezeichne die Restriktion von $\mathcal{L}'$ auf Ω_0' .)

(3.2) SATZ

Jede aperiodische Strömung $(\Omega, \mathcal{L}, m, (T_t)_{t \in \mathbb{R}})$ läßt sich in $(L^A, \mathcal{A}, (S_t)_{t \in \mathbb{R}})$ einbetten. Die Lipschitzkonstante $A > 0$ kann dabei beliebig vorgegeben werden.

Beweis:

Sei $A > 0$ gewählt. Wir haben die Existenz einer eindeutigen, meßbaren Abbildung $\varphi : \Omega \longrightarrow L^A$ mit $\varphi \circ T_t = S_t \circ \varphi$ zu zeigen. Wir wählen zunächst ein $t_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 \neq 0$. Nach (2.7) existiert ein abzählbarer Erzeuger vom endlichen Typ $\pi = \{P_1, P_2, \dots\}$ für $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$. Wir bestimmen eine Folge $(p_i)_{i \geq 1}$ strikt positiver Zahlen mit

$$A \geq p_i, \quad p_i > p_{i+1} \quad (i \geq 1)$$

und eine Folge $(q_i)_{i \geq 1}$ derart, daß $q_i \neq q_j$ ($i \neq j$),

$0 < q_i \leq 1$ und

$$q_i \leq l(P_i) \cdot p_i \cdot 4^{-1} \quad (i \geq 1)$$

ist.

Sei $w \in \Omega$ gegeben, dann definieren wir

$$\varphi(w) = \varphi_w : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$

wie folgt: zu $t \in \mathbb{R}$ existiert eindeutig ein Intervall

$I = [a, b[\subset \mathbb{R}$ maximaler Länge und ein $P_i \in \pi$ derart, daß $T_I w \subset P_i$. Seien

$$\begin{aligned} a_1 &= a + q_i \cdot p_i^{-1} \\ b_1 &= b - q_i \cdot p_i^{-1}, \end{aligned}$$

dann folgt aus der Beziehung zwischen p_i und q_i

$a < a_1 < b_1 < b$. Wir setzen

$$\varphi_w(t) = \begin{cases} p_i \cdot (t-a) & (t \in [a, a_1[) \\ q_i & (t \in [a_1, b_1[) \\ p_i \cdot (b-t) & (t \in [b_1, b[) \end{cases}$$

und erhalten unmittelbar $\varphi_w \in L^A$ ($w \in \Omega$) sowie

$$\varphi \circ T_t(w) = S_t \circ \varphi(w) \quad (w \in \Omega).$$

φ_w ist so definiert, daß für alle $t \in \mathbb{R}$ die rechtsseitige Ableitung

$$\varphi_w^r(t) = \lim_{t' \downarrow t} (\varphi_w(t') - \varphi_w(t)) \cdot (t' - t)^{-1}$$

existiert und die folgende Eigenschaft hat:

$$\begin{aligned} T_t(w) \in P_i &\iff \text{entweder } |\varphi_w^r(t)| = p_i \\ &\text{oder } \varphi_w^r(t) = 0 \text{ und } \varphi_w(t) = q_i. \end{aligned}$$

Sei $\varphi_w = \varphi_{w_i}$, d.h. $\varphi_w(t) = \varphi_{w_i}(t)$ ($t \in \mathbb{R}$). π ist ein Erzeuger für T_{t_0} , somit

$$\{w\} = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} T_{it_0} P_{w(i)},$$

d.h. $T_{-it_0} w \in P_{w(i)}$ ($i \in \mathbb{Z}$). Für jedes $i \in \mathbb{Z}$ ist nun

entweder $|\varphi_w^r(-it_0)| = p_{w(i)}$ oder $\varphi_w^r(-it_0) = 0$ und

$\varphi_w(-it_0) = q_{w(i)}$. Damit gilt für φ_w , im ersten Fall

$$\left| \varphi_w^r, (-it_0) \right| = p_w(i)$$

und im zweiten Fall

$$\varphi_w^r, (-it_0) = 0 \text{ und } \varphi_w, (-it_0) = q_w(i).$$

Es folgt $T_{-it_0} w' \in P_w(i)$ ($i \in \mathbb{Z}$), d.h.

$$w' \in \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} T_{it_0} P_w(i).$$

Dies bedeutet $w = w'$, womit die Eineindeutigkeit von φ bewiesen ist.

Die Meßbarkeit von φ ergibt sich aus einem allgemeinen Satz von Jacobs [2] (Theorem 3.2), wenn man weiß, daß die Funktion $h: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$h(w) = \varphi_w(0) \quad (w \in \Omega),$$

meßbar ist. Hierzu erklären wir analog zur Konstruktion von φ für jedes $n \geq 1$ eine Funktion $\varphi^n: \Omega \longrightarrow \mathbb{L}^A$, wobei wir anstelle der Zerlegung π die endliche Zerlegung π_n aus (2.7) zugrunde legen. Die Zuordnung der Werte p_i , q_i zu Zerlegungselementen P_i erfolge wie bei π . Die Funktionen $h^n: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$h^n(w) = \varphi_w^n(0) \quad (w \in \Omega)$$

sind offensichtlich meßbar und es gilt

$$h(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} h^n(w) \quad (w \in \Omega).$$

(3.3) COROLLAR

Jede ergodische Strömung läßt sich in $(L^A, \mathcal{A}, (S_t)_{t \in \mathbb{R}})$ ($A > 0$) einbetten.

Beweis:

Ist die Strömung nicht aperiodisch, so wählen wir nach (1.12) eine geeignete periodische Funktion aus L^A .

Literatur

Ambrose W.:

- [1] Representation of ergodic flows.
Annals of Mathematics Vol. 42 (1941) p. 723-739

Ambrose W., Kakutani S.:

- [1] Structure and continuity of measurable flows.
Duke Math. Journal Vol. 9 (1942) p. 25-42

Arnold V.I., Avez A.:

- [1] Ergodic problems of classical mechanics.
W.A. Benjamin New York-Amsterdam (1968)

Bauer H.:

- [1] Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maß-
theorie. Walter de Gruyter Berlin (1968)

Billingsley P.:

- [1] Ergodic theory and information.
John Wiley u. Sons New York-London-Sydney (1965)

Eberlein E.:

- [1] Ein Isomorphiesatz für stetige Flüsse mit beschränk-
ter Geschwindigkeit. (unveröffentlicht)

Jacobs K.:

- [1] Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie.
Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg (1960)
- [2] Lipschitz functions and the prevalence of strict
ergodicity for continuous-time flows.
Lecture notes in mathematics 160. Springer-Verlag
Berlin-Göttingen-New York (1970)
- [3] Maß und Integral. Vorlesungsausarbeitung
Erlangen (1966)

Kakutani S.:

- [1] A proof of Bebutov's theorem.
Journal of differential equations 4 (1968)
p. 194-201

Ornstein D.S.:

- [1] The isomorphism theorem for Bernoulli flows.
(to appear)

Rokhlin V.A.:

- [1] Lectures on the entropy theory of measure-preserving transformations.
Russian mathematical surveys Vol. 22 (5) (1967)
p. 1-52

Lebenslauf

Am 21. Mai 1945 wurde ich, Ernst Wilhelm Eberlein, als Sohn des Holzkaufmanns Wilhelm Eberlein und seiner Ehefrau Ruth, geb. Gräber, in Rothenburg ob der Tauber geboren.

Nach vierjährigem Besuch der Volksschule trat ich im September 1955 in das Reichsstadtgymnasium Rothenburg ob der Tauber ein. Ich verließ die Höhere Schule mit Erlangung der Mittleren Reife und begann im September 1961 eine Lehre als Industriekaufmann, die ich im Mai 1963 erfolgreich abschließen konnte. Während des darauffolgenden Jahres war ich kaufmännisch berufstätig. Im April 1964 kehrte ich in das früher besuchte Gymnasium zurück und legte dort im Sommer 1966 die Reifeprüfung ab.

Zu Beginn des Wintersemesters 1966/67 schrieb ich mich an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg für die Fächer Mathematik und Physik ein. In Mathematik hörte ich vor allem Vorlesungen bei Herrn Prof. Dr. H. Bauer, Herrn Prof. Dr. K. Jacobs und Herrn Prof. Dr. W. Specht; in Physik bei Herrn Prof. Dr. R. Fleischmann. Im November 1968 legte ich die Diplom-Vorprüfung, im Dezember 1970 die Diplom-Hauptprüfung für Mathematik ab. Das Studienjahr 1969/70 verbrachte ich an der Universität Paris.

Mit Ausnahme des Aufenthaltes in Frankreich war ich vom Mai 1968 bis März 1971 am Mathematischen Institut der Universität Erlangen-Nürnberg als studentische Hilfskraft mit dem Abhalten von Übungen betraut. Seit April 1971 bin ich als wissenschaftlicher Assistent bei Herrn Prof. Dr. K. Jacobs tätig.

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990